Fibonacci 数列の一般項

@ymk_math

2023 年 5 月 28 日

隣接 3 項間漸化式

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

で定義される数列 $\{F_n\}$ を Fibonacci 数列という. F_1 を初項とする場合も多いが, ここでは F_0 を初項とする.

$\{F_n\}$ の一般項について, 求める方法はいくつか存在するが, ここでは母関数を用いて一般校を求めていく.

$\{F_n\}$ の母関数を $F(x)$ とすると

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

である. 漸化式を用いるために $F(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned}
F(x) &= F_0 + F_1 x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^n \\
&= x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n+1} + F_n) x^n \\
&= x + x \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x(F(x) - F_0) + x^2 F(x) \\
&= x^2 F(x) + xF(x) + x
\end{aligned}$$

となる. よって, $(x^2 + x - 1)F(x) = -x$ より $F(x) = -\dfrac{x}{x^2 + x - 1}$ が成り立つ.

2 次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の解 $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ を用いると, $x^2 + x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$ であるから, 部分分数分解を用いることにより

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{x}{(x - \alpha)(x - \beta)} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(-\frac{\alpha}{x - \alpha} + \frac{\beta}{x - \beta} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{\beta}} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n - \left(\frac{1}{\beta} \right)^n \right\} x^n
\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}, \frac{1}{\alpha} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\beta} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

より

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} x^n$$

となる.

母関数の各項の係数比較により

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

が成り立つ.